Padé-Approxmation

Michael Rennecke

Institut für Numerische Mathematik
Martin-Luther-Universiät Halle-Wittenberg

16. Januar 2007

Allgemein

Die Padé-Approxmation ist eine gebrochen-rationale Funktion, wobei der Nenner und der Zähler abgebrochene Potenzreihen sind. Die Padé-Approxmation ist der Taylorapproxmation überlegen, da diese Funktionen auch Polstellen enthalten können.

Definition der Padé-Approxmation

Gegeben: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch eine Potenzreihe gegeben:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Als Padé-Approximation bezeichnet man:

$$f_{ML}(x) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{L} b_n x^n}{\sum\limits_{v=0}^{M} c_v x^v}$$

deren Taylor-Entwicklung um $x = 0$ mit der Potenzreihe von $f(x)$ bis einschließlich der $(M + L)$-ten Potenz übereinstimmen.

Fakten

- man kann *kein allgemeingültiges* Restglied für M und $L \to \infty$ angeben (wie Taylor)
- O.B.d.A. kann man $c_0 = 1$ annehmen, andernfalls dividiert man Zähler und Nenner durch c_0
- Je nach Wahl von M und L kann man verschiedene Padé-Approximationen konstruieren, die die Funktion bis zur $(M + L)$-ten Potenz approximieren.

Hankel-Matrix

$$H_k^{(n)} = \begin{pmatrix} c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & \cdots & c_{n+2k-2} \end{pmatrix}$$

mit $(c_n) \in \mathbb{C}$ einer belebigen Zahlenfolge.

Berechnung

- Padé-Appr. ex. und ist eind. bestimmt $\Leftrightarrow det(H_M^{L-M+1}) \neq 0$
- Koeffizienten $b_0, b_1, \ldots b_L$ und $c_0, c_1, \ldots c_M$ ergeben die Lösung der Padé-Gleichungen

$$H_M^{L-M+1} * \begin{pmatrix} c_M \\ c_{M-1} \\ \vdots \\ c_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{L+1} \\ a_{L+2} \\ \vdots \\ a_{L+M} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_1 + c_1 * a_0 \\ b_2 &= a_2 + c_1 * a_1 + c_2 * a_0 \\ &\vdots \\ b_L &= a_L + \sum_i^{min(L,M)} c_i * a_{L-i} \end{aligned}$$

Literatur

- wolfram.com
- Uni Kassel
- www.fullerton.edu
- Wikipedia (englisch)