Tschebyscheff-Polynome

Michael Rennecke

Institut für Numerische Mathematik
Martin-Luther-Universiät Halle-Wittenberg

23. November 2006

Anwendung

1. Filtertechnik bei Tiefpass
2. gleichmäßige Approximation
3. optimale Stützstellenwahl bei Interpolation
4. Diffentialgleichungen
5. Algebra: Kommuativer Ring mit Einselement

Definition für Parameterdarstellung

Ein Tschebyscheff-Polynom T_n ist ein Polynom vom Grad n

Definition

1. für $x \in [-1, 1]$
   $T_n(x) = \cos n\xi,\ x = \cos \xi$
2. für $x \in (-\infty, -1]$
   $T_n(x) = \cosh n\xi,\ x = \cosh \xi$
3. für $x \in [1, \infty)$
   $T_n(x) = (-1)^n \cosh n\xi,\ x = \cosh \xi$

weitere Parameterdarstellung

Darstellung des Cosinus bzw. hyperbolischen Cosinus mit Hilfe von $z = \exp(i\xi)$ bzw. $z = \exp(\xi)$

$$T_n(x) = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \; x = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

weitere Parameterdarstellung

Darstellung des Cosinus bzw. hyperbolischen Cosinus mit Hilfe von $z = \exp(i\xi)$ bzw. $z = \exp(\xi)$

$$T_n(x) = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \; x = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

Rekursionsgleichung

Man erkennt, dass $T_0(x) \equiv 1$ und $T_1(x) = x$ gilt. Für $n \geq 2$ gilt die folgende Rekusion:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Die Polynome sehen dann wie folgt aus:
$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + ... + p_n, \; n \geq 1$

Rekursionsgleichung

Man erkennt, dass $T_0(x) \equiv 1$ und $T_1(x) = x$ gilt. Für $n \geq 2$ gilt die folgende Rekusion:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Die Polynome sehen dann wie folgt aus:
$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + ... + p_n, \;\; n \geq 1$

Rekursionsgleichung

Man erkennt, dass $T_0(x) \equiv 1$ und $T_1(x) = x$ gilt. Für $n \geq 2$ gilt die folgende Rekusion:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Die Polynome sehen dann wie folgt aus:
$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + ... + p_n, \;\; n \geq 1$

Symmetrie

Satz 1

Sei $T_n(x)$ ein Tschebyscheff-Polynom vom Grad n, dann gilt:

$$T_n(x) = (-1)^n T_n(-x)$$

Für gerade n sind die T_n symmetrisch und für ungeade n sind sie punktsymmetrisch zum Ursprung.

Nullstellen 1

Die NST von $T_n, \; n \geq 1$ sind

- reell
- einfach
- liegen im Intervall $(-1, 1)$

und sind durch

$$x_\nu = \cos \xi_\nu \text{ mit } \xi_\nu = \frac{\nu - \frac{1}{2}}{n} \pi \text{ und } \nu \in \{1, 2, ..., n\}$$

gegeben.

Nullstellen 1

Die NST von $T_n, \; n \geq 1$ sind

- reell
- einfach
- liegen im Intervall $(-1, 1)$

und sind durch

$$x_\nu = \cos \xi_\nu \text{ mit } \xi_\nu = \frac{\nu - \frac{1}{2}}{n} \pi \text{ und } \nu \in \{1, 2, ..., n\}$$

gegeben.

Nullstellen 2

Die Folge $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ ist offenbar gemäß

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_n < \pi$$

geordnet, so dass die NST x_ν absteigend geordnet sind:

$$1 > x_1 > x_2 > ... > x_n > -1$$

Das die x_ν die NST von T_n sind folgt direkt aus der Definition und es sind alle NST, da ein Polynom vom Grad n maximal n NST haben kann.

Extremwerte

Aus der Definition folgt, dass die $T_n,\ n \geq 1$ die Schranken -1 bzw. 1 genau $n+1$ mal annehmen und zwar an den Stellen:

$$\tilde{x_\nu} = \cos \tilde{x_\nu \xi_\nu} \text{ mit } \tilde{x_\nu \xi_\nu} = \frac{\nu-1}{n}\pi \text{ und } \nu \in \{1, 2, ..., n, n+1\}$$
$$T_n(\tilde{x_\nu}) = (-1)^{\nu-1} \text{ mit } \nu \in \{1, 2, ..., n, n+1\}$$

Da ein Polynom vom Grad n maximal $n-1$ Extrema besitzt bilden die $\tilde{x_2}, \tilde{x_3}, ..., \tilde{x_n}$ die Menge der lokalen Extrema.

Extremwerte

Aus der Definition folgt, dass die $T_n, \;\; n \geq 1$ die Schranken -1 bzw. 1 genau $n+1$ mal annehmen und zwar an den Stellen:

$$\tilde{x_\nu} = \cos x_\nu \tilde{\xi}_\nu \text{ mit } x_\nu \tilde{\xi}_\nu = \frac{\nu-1}{n}\pi \text{ und } \nu \in \{1, 2, ..., n, n+1\}$$
$$T_n(\tilde{x_\nu}) = (-1)^{\nu-1} \text{ mit } \nu \in \{1, 2, ..., n, n+1\}$$

Da ein Polynom vom Grad n maximal $n-1$ Extrema besitzt bilden die $\tilde{x_2}, \tilde{x_3}, ..., \tilde{x_n}$ die Menge der lokalen Extrema.

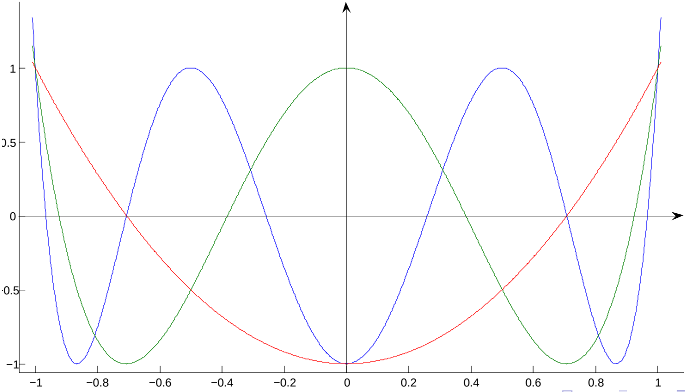
Asymtotisches Verhalten

Polynome verhalten sich wie ihre höchste Potenz, also verhalten sich alle T_n wie folgt:

$$\lim_{x \to \pm\infty} 2^{n-1} x^n$$

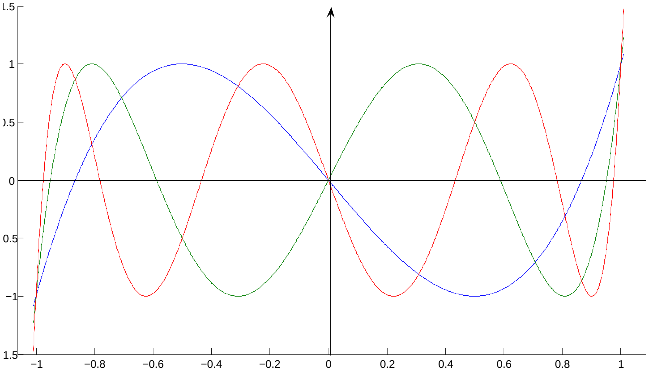
gerade n

rot: $T_2(x) = 2x^2 - 1$ grün: $T_4(x) = 8x^4 - 8 * x^2 + 1$
blau: $T_6(x) = 2 * x^6 - 48 * x^4 + 18 * x^2 - 1$



ungerade n

blau: $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ rot: $T_5(x)16x^5 - 20 * x^3 + 5x$
grün: $T_7(x) = 64x^7 - 112 * x.^5 + 56x^3 - 7x$



Verhalten

Bei den meisten Anwendungen ist nur das Verhalten in $[-1, 1]$ von Interesse.

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_x(x)| = 1$$

Die T_n sind die einzigen Polynome, die $\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_x(x)| \leq 1$ erfüllen.

Verhalten

Bei den meisten Anwendungen ist nur das Verhalten in $[-1, 1]$ von Interesse.

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_x(x)| = 1$$

Die T_n sind die einzigen Polynome, die $\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_x(x)| \leq 1$ erfüllen.

Polynomapproximation

Man kann den sin und cos auch durch Tschebyscheff-Polynome darstellen und diese Reihen konvergieren viel schneller als entsprechenden Taylorreihen.

$$\cos x\pi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu T_{2\nu}(x) \text{ und } \sin x\pi = x \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu T_{2\nu}(x)$$

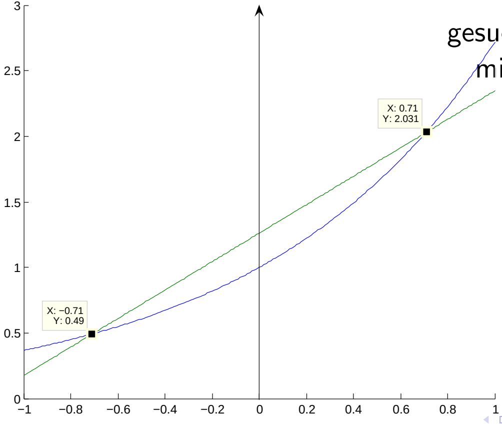
Polynomapproximation

Man kann den sin und cos auch durch Tschebyscheff-Polynome darstellen und diese Reihen konvergieren viel schneller als entsprechenden Taylorreihen.

$$\cos x\pi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu T_{2\nu}(x) \text{ und } \sin x\pi = x \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu T_{2\nu}(x)$$

lineare Approximation

blau: $f(x) = e^x$ Stützstellen: $x_{0,1} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ und grün:
$p_1(x) = 1,085441 * x + 1,2606504$

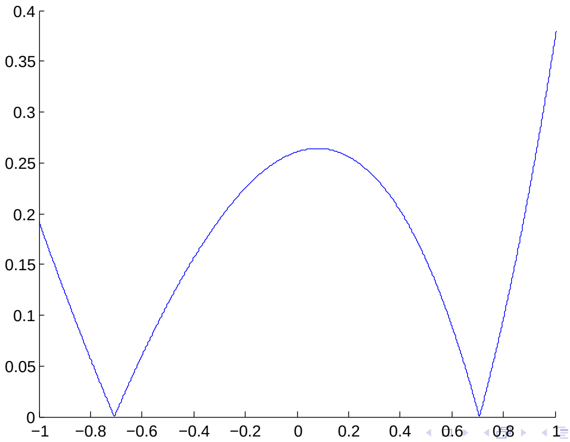


gesucht:

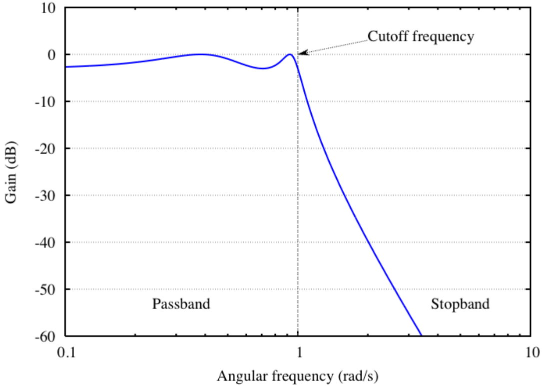
$$\min \max_{x \in I} |f(x) - p_1(x)|$$

Absolute Fehler

$$g(x) = |f(x) - p_1(x)|$$



Tiefpass


Cutoff frequency
Passband
Stopband
Gain (dB)
Angular frequency (rad/s)
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
0.1
1
10

Literatur

- Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 2
- Preuß/Wenisch Numerische Mathematik
- Monatshefte für Mathematik 77, 132-147 (1973)
- Teubner - Taschenbuch der Mathematik