Proseminar Analysis

Stetige Fortsetzung von Funktionen

Michael Rennecke

Dozent: Prof. Dr. Carl

1 Stetige Fortsetzung

Definition: Stetigkeit

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $n \geq 1$ eine Funktion. Dann heißt f im Punkt $x_0 \in D$ stetig, wenn *für alle* Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$x_n \to x_0 \text{ für } n \to \infty \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \text{ für } n \to \infty;$$

sonst heißt f im Punkt x_0 *unstetig*.

Motivation

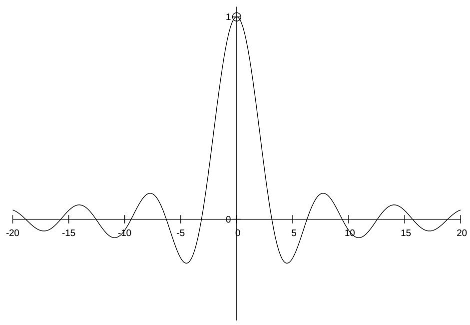
Es sei die Funktion f auf X definiert, x_0 gehöre nicht zu X und es möge Folgen aus X geben, die gegen x_0 konvergieren dann können folgende Fälle eintreten:

a) Für *jede* gegen x_0 konvergierende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X *konvergiert* auch die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$

b) Es gibt *mindestens eine* Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *divergiert.*

Beispiel zu a)

$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$



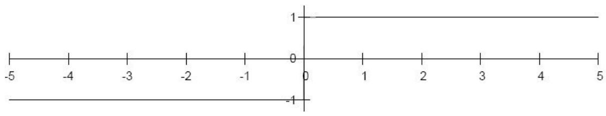
Man nehme die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ für $n \to \infty$ und setzte die in f ein. Dann erhält man: $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} : \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$. Diesen Grenzwert kann man nicht bestimmen, da es ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ ist. Also wendet man L'Hospital an:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \lim_{x\to 0} \cos(x) = cos(0) = 1$$

Wie man jetzt sieht muss der Grenzwert einer Funktion an den Punkt existieren, für den die Funktion f definiert ist um *stetig fortgesetzt* zu werden.

b)

$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 1 \\ -1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$



Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ weiter sieht man, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Die Folge $\left(f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, d.h. der Grenzwert existiert nicht!

Definition: Stetige Fortsetzung

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$, sowie x_0 ein Häufungspunkt von D sowie sei f auf $D\backslash\{x_0\}$ stetig.

1. Eine Funktion $\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ heißt *stetige Fortsetzung von f im Punkt x_0*, wenn $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f & : x \in D\backslash\{x_0\} \\ c & : x = x_0 \text{ und } \tilde{f} \text{ ist in } x_0 \text{ stetig} \end{cases}$, $c \in \mathbb{R}$ und fest
2. Ist $x_0 \in D$, f im Punkt x_0 unstetig und es existiert eine stetige Fortsetzung von f in den Punkt x_0, so heißt x_0 eine *behebbare Unstetigkeitsstelle von f*.

Folgerung

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Funktion, x_0 sei Häufungpunkt von D und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$: So existiert eine *stetige Fortsetzung* von f im Punkt x_0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert.
Falls dies der Fall ist, so ist die *stetige Fortsetzung* von f im Punkt x_0 *eindeutig* bestimmt.
Beweis:
x_0 ist stetige Fortsetzung
Man definiere $\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ wie folgt $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & : x \in D\backslash\{x_0\} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & : x = x_0 \end{cases}$
$\tilde{f}$ ist nach der *Definition für Stetigkeit* stetig in $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ist stetige Fortsetzung von f im Punkt x_0.

2 Rechnungen

Aufgabe 1

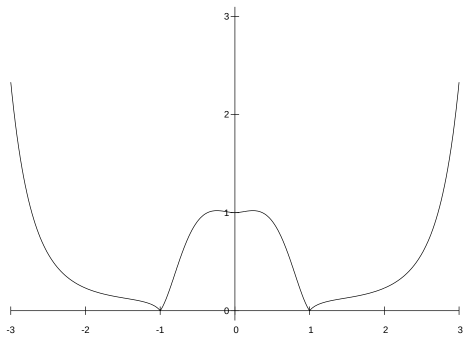
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |\ln|x||^{x^2}$
Nun soll herausgefunden werden, ob die Funktion f im Punkt $x_0 = 0$ stetig fortgesetzt werden kann, also ob die Funktion $\tilde{f}(x) := \begin{cases} |\ln|x||^{x^2} & : x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ \lim\limits_{x \to 0} |\ln|x||^{x^2} & : x = 0 \end{cases}$ existiert.
$|\ln|x||^{x^2} = e^{x^2 * \ln|\ln|x||}$ Es sei $0 < x < 1$ dann ist $|\ln|x|| = |\ln x| = -\ln x = \ln\frac{1}{x}$
Zeige, dass $\lim\limits_{x \to 0}\left(x^2 * \ln(-\ln x)\right)$ existiert und 0 ist.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0}\left(x^2 * \ln\left(\ln\tfrac{1}{x}\right)\right) &\overset{\substack{Logarithmen- \\ gesetze}}{=} \lim_{x \to 0}\left(x^2 * \ln(-\ln x)\right) \\
&= \lim_{x \to 0}\frac{\ln(-\ln x)}{\frac{1}{x^2}} \\
&\overset{l'Hospital}{=} \lim_{x \to 0}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{-2}{x^3}} \\
&= \lim_{x \to 0}\frac{x^3}{-2x\ln x} \\
&= \lim_{x \to 0}\frac{x^2}{-2\ln x} \\
&= \frac{0}{\infty} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Zeige, dass der Funktionswert existiert:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(e^{x^2*\ln|\ln|x||}\right) &&= \\
&\lim_{x\to +0}\left(e^{x^2*\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)}\right) &&= \\
&e^{\lim\limits_{x\to +0}\left(x^2*\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)} &&= \\
&e^0 &&= 1
\end{aligned}$$

Für $-1 < x < 0$ ist die Argumentation analog. Daraus folgt der Grenzwert im Punkt $x_0 = 0$ existiert und somit ist f im Punkt $x_0 = 0$ durch den Wert 1 stetig fortgesetzt werden.



$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} |\ln|x||^{x^2} & : x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$$

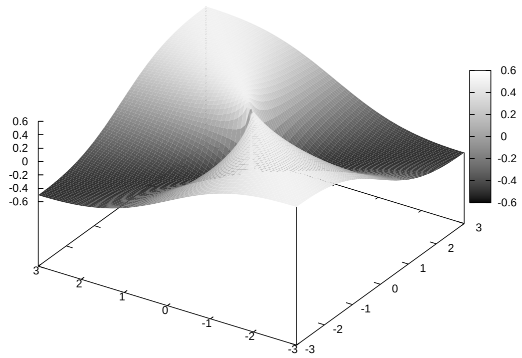
Aufgabe 2

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} \frac{x_1*x_2}{x_1^2+x_2^2} & \text{für } x \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } x = (0,0) \end{cases}$

Frage: Ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig?
Hier muss man 2 Fälle betrachten:

1. $x \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$
   Hier gibt es nichts zu zeigen, da es sich um eine Zusammensetzung von stetigen Funktionen handelt. *Der Quotient von stetigen Funktion ist wieder stetig, wenn der Nenner ungleich 0 ist.*

2. $x = (0,0)$, weise Unstetigkeit nach:
   sei $\left(x^k\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \to (0,0)$ eine Folge $f(x^k) = \frac{\frac{1}{k}*\frac{1}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)^2+\left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}} = \frac{\frac{1}{k^2}}{2\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow f$ ist nicht stetig im Punkt 0



$$f(x) := \begin{cases} \frac{x_1 * x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } x \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } x = (0,0) \end{cases}$$

Da gezeigt ist, dass f im Punkt 0 nicht stetig ist, versucht man das Definitionsgebiet zu einzuschränken, dass f auf den gesamten Definitionsgebiet stetig ist, auch im Punkt 0.

1. Umformen der Funktion:
   $\frac{x_1 * x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1 * x_2}{x_1 * x_2 \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right)} = \frac{1}{\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}}$

2. Definitionsgebiet einschränken:
   $x_2 = x_1^k, k \in \mathbb{R}$

3. Betrachten nun die Funktion: $f(x_1) = \frac{1}{\frac{x_1}{x_1^k} + \frac{x_1^k}{x_1}}$

   Damit f im Punkt 0 stetig ist, muss der Term $\frac{x_1}{x_1^k} + \frac{x_1^k}{x_1} \to \infty$

   stellen die x_1 wie folgt dar: $q * n$ mit $0 < q, q \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{q*n}{(q*n)^k} + \frac{(q*n)^k}{q*n} = \frac{1}{q^{k-1} n^{k-1}} + q^{k-1} n^{k-1} = \frac{1}{q^{k-1}} * \frac{1}{n^{k-1}} + q^{k-1} n^{k-1}$

4. Interpretation des Term $\frac{1}{q^{k-1}} * \frac{1}{n^{k-1}} + q^{k-1} n^{k-1}$ als Zahlenfolge *(für welche k konvergent)*:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{q^{k-1}} * \frac{1}{n^{k-1}} + q^{k-1} n^{k-1} \right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{q^{k-1}}_{konst}} * \frac{1}{n^{k-1}} + \lim_{n\to\infty} \underbrace{q^{k-1}}_{konst} n^{k-1} =$$

$$\frac{1}{q^{k-1}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}} + q^{k-1} \lim_{n\to\infty} n^{k-1}$$

   i) $\underline{k < 1:}$ $\frac{1}{q^{k-1}} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}}}_{\infty} + q^{k-1} \underbrace{\lim_{n\to\infty} n^{k-1}}_{0} = \infty + 0 = \infty \Rightarrow$ divergent

   ii) $\underline{k = 1:}$ $\frac{1}{q^{k-1}} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}}}_{1} + q^{k-1} \underbrace{\lim_{n\to\infty} n^{k-1}}_{1} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow$ konvergent

   iii) $\underline{k > 1:}$ $\frac{1}{q^{k-1}} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}}}_{0} + q^{k-1} \underbrace{\lim_{n\to\infty} n^{k-1}}_{\infty} = 0 + \infty = \infty \Rightarrow$ divergent

5. Zusammenfassung:
   Aus diesen Ergbnis schließen wir, dass wir das Gebiet D, auf dem die Funktion definiert ist wie folgt einschränken müssen:

$$\begin{array}{rcl} D_1 & = & \{(x_1, x_2) : |x_2| < |x_1|^{\alpha} \wedge \alpha > 1\} \\ D_2 & = & \{(x_1, x_2) : |x_2| > |x_1|^{\beta} \wedge \beta < 1\} \\ D' & = & D_1 \cup D_2 \end{array}$$

Zeige Stetigkeit im Nullpunkt auf D_1:

Zur Erinnerung: *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ für $||x|| < \delta$*

$$|f(x)| = \left|\frac{x_1 x_2}{x_1^2+x_2^2}\right| = \frac{|x_1||x_2|}{|x_1^2+x_2^2|} < \frac{|x_1||x_2|}{|x_1|^2} = \frac{|x_1||x_2|}{|x_1||x_1|} = \frac{|x_2|}{|x_1|} < \frac{|x_1|^{\alpha}}{|x_1|} = |x_1|^{\alpha-1} < \delta^{\alpha-1} < \varepsilon$$

Zeige Stetigkeit im Nullpunkt auf D_2:

$$|f(x)| = \left|\frac{x_1 x_2}{x_1^2+x_2^2}\right| = \frac{|x_1||x_2|}{|x_1^2+x_2^2|} < \frac{|x_1||x_2|}{|x_2|^2} = \frac{|x_1||x_2|}{|x_2||x_2|} = \frac{|x_1|}{|x_2|} <$$
$$\frac{|x_2|^{\frac{1}{\beta}}}{|x_2|} = |x_2|^{\frac{1}{\beta}-1} = |x_2|^{\frac{1-\beta^2}{\beta}} < \delta^{\frac{1-\beta^2}{\beta}} < \varepsilon$$

Nun hat man gezeigt, dass f auf D_1 und D_2 stetig im Nullpunkt ist.
Also ist $f : D_1 \cup D_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} \frac{x_1 * x_2}{x_1^2+x_2^2} & \text{für } x \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } x = (0,0) \end{cases}$ stetig!